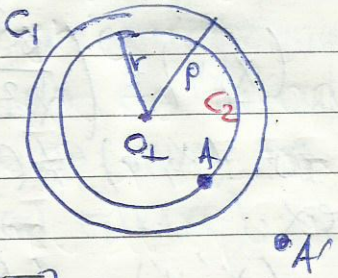
Παρατηρήσεις

1) Τα εσωτερικά σημεία του κύκλου αντιστροφής απεικονίζονται σε εξωτερικά σημεία.
Τα σημεία στην περιφέρεια του κύκλου απεικονίζονται στον εαυτό τους.
Άρα, ο ίδιος ο κύκλος αντιστροφής → στον εαυτό του

2) Εικόνα του $C_2(O_1, r)$:
Κάθε σημείο του C_2 ως εσωτερικό θα γίνει εξωτερικό του C_1 θα απεικονισθεί σε εξωτερικό του C_1 και $OA \cdot OA' = \rho^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow OA' = \frac{\rho^2}{r}$



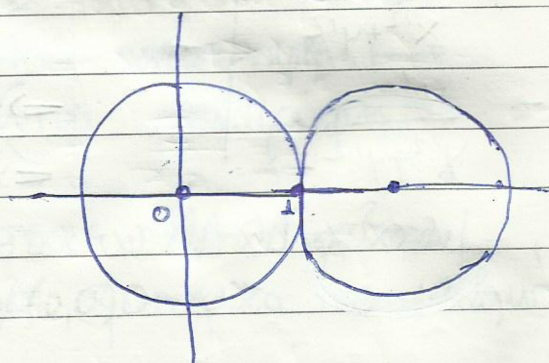
Άρα, η εικόνα του C_2 είναι κύκλος κέντρου O_1 και ακτίνας $\frac{\rho^2}{r}$

Παραδείγματα:

1) Ν.β η εικόνα του κύκλου: $(x-2)^2+y^2=1$ μέσω αντιστροφής ως προς μοναδιαίο κύκλο

ΛΥΣΗ

$(x-2)^2+y^2=1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2+y^2-4x+4=1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2+y^2-4x+3=0$ (1)



$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{x'}{x'^2+y'^2} \\ y = \frac{y'}{y'^2+x'^2} \end{array}\right\} \overset{(1)}{\Rightarrow} \left(\frac{x'}{x'^2+y'^2}\right)^2 + \left(\frac{y'}{x'^2+y'^2}\right)^2 - 4\left(\frac{x'}{x'^2+y'^2}\right) + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1-4x'}{x'^2+y'^2} + 3 = 0 \Rightarrow 1-4x'+3(x')^2+3(y')^2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x'^2+y'^2-\frac{4}{3}x'+\frac{1}{3}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x'^2 + y'^2 - 2\frac{1}{2}\frac{4}{3}x' + \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow$$

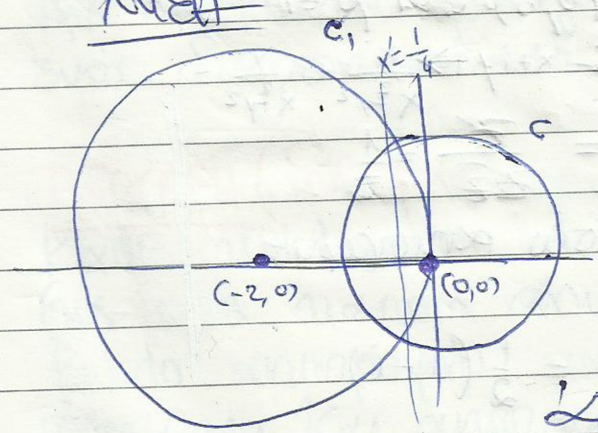
$$\Rightarrow \left(x' - \frac{2}{3}\right)^2 + y'^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \leftarrow (C)$$

Άρα, η εικονα του κυκλου $(x-2)^2 + y^2 = 2$ είναι αλλος κύκλος κεντρου $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ και ακτίνα $\frac{1}{3}$

Παρατηρηση:
το κεντρο του κυκλου προς αντιστροφή είναι το $(2,0)$ το οποιο θα απεικονισθεί στο $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ οπου $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ δεν είναι το κεντρο του (C) δηλ. $\left(\frac{1}{2}, 0\right) \neq \left(\frac{2}{3}, 0\right)$. Άρα, κυκλος που δεν διερχεται απο το κεντρο του κυκλου αντιστροφής πηγαίνει σε κύκλο χωρίς όμως απαραίτητα το κέντρο του να απεικονίζεται στο κεντρο του αλλου

2) Ν.δ. η εικόνα του κύκλου $(C_1): (x+2)^2 + y^2 = 2^2$ μέσω αντιστροφής της προς το μοναδιαίο κυκλο

ΛΥΣΗ



ο C_1 διερχεται απο το κεντρο αντιστροφής του C

$(x+2)^2 + y^2 = 2^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + 4x = 0$

$$x = \frac{x'}{x'^2 + y'^2} \quad \text{και} \quad y = \frac{y'}{y'^2 + x'^2}$$

$$\text{Άρα,} \left(\frac{x'}{x'^2 + y'^2}\right)^2 + \left(\frac{y'}{y'^2 + x'^2}\right)^2 + 4\left(\frac{x'}{x'^2 + y'^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1 + 4x'}{x'^2 + y'^2} = 0 \Rightarrow 1 + 4x' = 0 \Rightarrow \boxed{x' = -\frac{1}{4}}$$

Δηλ. ο κυκλος (C_1) απεικονίσθηκε σε ευθεία

Αντιστροφα, η εικονα της ευθείας $x = -\frac{1}{4}$ οπου $x' = x'/(x'^2 + y'^2)$

Άρα, $\frac{x'}{x'^2+y'^2} = -\frac{1}{4} \Rightarrow x'^2+y'^2+4x'=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x'+2)^2+y^2=2^2$

ΘΕΩΡΗΜΑ:
Εικόνες των κύκλων μέσω αντιστροφής
α) κύκλος ο οποίος δεν διέρχεται από το κέντρο αντιστροφής, απεικονίζεται σε κύκλο
β) κύκλος ο οποίος διέρχεται από το κέντρο αντιστροφής, απεικονίζεται σε ευθεία η οποία δεν διέρχεται από το κέντρο αντιστροφής

ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ: Η αντιστροφή ως προς κύκλο C κέντρου (α,β) και ακτίνας ρ, παριστάνεται στο μιγαδικό επίπεδο μέσω του μετασχηματισμού
$\varphi_c(z) = \frac{\rho^2}{z-c}+c$, όπου $c=\alpha+i\beta$ και $z=x+iy$
$z \in \mathbb{C} \setminus \{\alpha+\beta i\}$

* Αν C μοναδιαίος $\Rightarrow (\alpha,\beta)=(0,0)$ και $\rho=1$
$\Rightarrow \varphi_c(z) = \frac{1}{z}$ διότι $z=x+iy \mapsto \frac{x}{x^2+y^2}+i\frac{y}{x^2+y^2} =$
$= \frac{z}{z\bar{z}} = \frac{1}{\bar{z}}$

Παραδείγματα:

1) Η εικόνα του $z=1-i$ μέσω αντιστροφής ως προς το μοναδιαίο

$z \longmapsto \frac{1}{\overline{1-i}} = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{1^2-i^2} = \frac{1}{2}(1-i)$

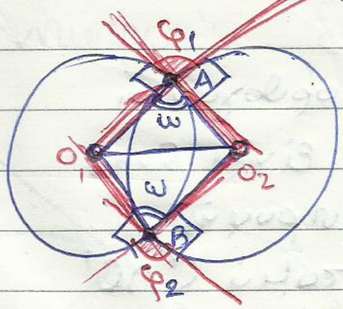
2) Αν ο κύκλος αντιστροφής C είναι κέντρου $(1,0)$ και ακτίνας 2

Τότε, $\varphi_c(z) = \frac{\rho^2}{\overline{z-c}}+c \overset{z=x+iy}{=} \frac{4}{\overline{x+iy-1}}+1+0i =$

$= \frac{4}{\bar{z}-1}+1 = \ldots$

ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΙ ΚΥΚΛΟΙ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ:

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ορίζουμε ως γωνία δύο τεμνόμενων κύκλων τη γωνία που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες στα σημεία τομής των δύο κύκλων



$O_1\hat{A}O_2 = O_1\hat{B}O_2$

($O_1O_2 = O$ κοινή, $O_1A = O_1B$ και $O_2A = O_2B$)

Η εφαπτομένη του κύκλου τέμνει πάντοτε την ακτίνα του κύκλου στο σημείο επαφής κάθετα.

Έτσι, $\varphi_1 + 2$ ορθές $+ O_1\hat{A}O_2 = \varphi_2 + 2$ ορθές $+ O_1\hat{B}O_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2$

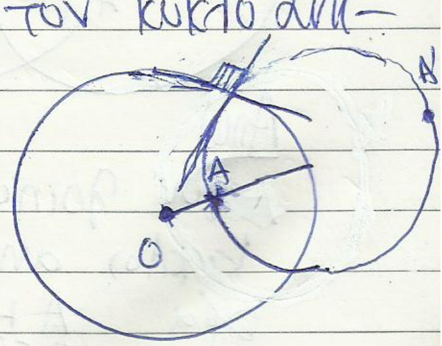
Εάν $\varphi = 1$ ορθή $\Rightarrow$ οι κύκλοι λέγονται ορθογώνιοι (τέμνονται ορθογώνια)

Παρατήρηση

Αν οι κύκλοι ορθογώνιοι τότε οι εφαπτόμενες του ενός διέρχονται από το κέντρο του άλλου

ΠΡΟΤΑΣΗ (Σοβαρή)

Κάθε κύκλος που διέρχεται από δύο αντίστροφα σημεία (ως προς κάποια αντιστροφή) είναι ορθογώνιος με τον κύκλο αντιστροφής και μένει αναλλοίωτος ως προς την αντιστροφή. Και αντίστροφα αν ένας κύκλος μένει αναλλοίωτος ως προς μία αντιστροφή, τότε τέμνει τον κύκλο αντιστροφής ορθογώνια.

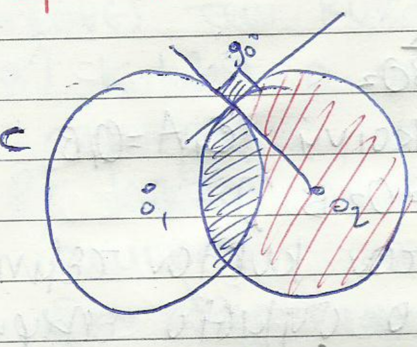


ΠΟΡΙΣΜΑ:

Εάν C_1, C_2 ορθογώνιοι κύκλοι
τότε $C_1 \xrightarrow[\text{κυκλ. αντιστρ.}]{C_2} C_1$ και $C_2 \xrightarrow[\text{κυκλος αντιστροφ.}]{C_1} C_2$

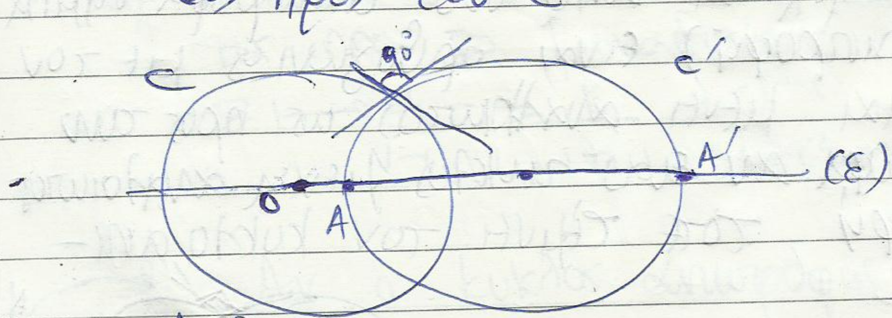
Παρατηρήσεις:

(1)



C και C' ορθογώνιοι,
Αν ο C είναι ένας κύκλος αντιστροφής τότε η τομή $C \cap C'$ που απεικονίζεται
θα απεικονίζεται στο $C' \setminus C$
και αντίστροφα
διότι το C, C' ορθογ. $\xRightarrow{\text{Πόρισμα}} C' \to C'$
και γνωστό ότι τα εσωτερικά $C \mapsto$ εξωτερ.
και τα εξωτερικά $\xmapsto[\text{κυκλ. αντιστρ.}]{C}$ εσωτερικά

(ΣΟΣ)
(2) Κάθε ευθεία όπου διέρχεται από το κέντρο του κύκλου αντιστροφής (και C, C' ορθογώνιοι) τέμνει τον C' σε σημείο A τότε θα τον τέμνει (και το A όχι σημείο τομής των δύο κύκλων) στο A' όπου A' είναι το αντίστροφο του A ως προς την αντιστροφή ως προς τον C



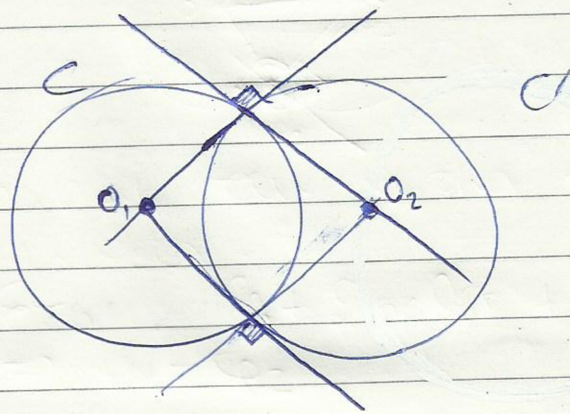
Απόδ.

Αφού λοιπόν C, C' ορθογώνιοι (και C κύκλος αντιστροφής) $\Rightarrow C' \xmapsto{C} C'$
άρα $\underset{\in C'}{A} \mapsto \underset{\in C'}{B}$ (Ι). Η ευθεία (ε)
διέρχεται από το κέντρο αντιστροφής

διέρχεται από το κέντρο αντιστροφής $\Rightarrow$
$\Rightarrow (\varepsilon) \mapsto (\varepsilon)$ άρα και το $A \in (\varepsilon)$ θα
απεικονισθεί σε σημείο της ευθείας $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ λόγω του ① τότε $A \mapsto A$ × αφού A όχι σημείο του C
$A \mapsto A'$

③ Η αντιστροφή διατηρεί αναλλοίωτες τις γωνίες

④



C, C' ορθογώνιοι
ο C' μέσω της αντιστροφής
ως προς $C \mapsto$ στον εαυτό
του.

1) $A \xmapsto[\text{ως προς } C]{\text{αντιστρ.}} A$ και $B \xmapsto[\text{ως προς } C]{\text{αντιστρ.}} B$ (όπως σημεία του
κύκλου αντιστροφής)

2) ο C' κύκλος που δε διέρχεται από το
κέντρο αντιστροφής $\Rightarrow C' \mapsto$ κύκλο

3) Οι ευθείες OA και $OB \mapsto OA$ και OB αφού
διέρχονται από το κέντρο αντιστροφής (αλλιώς
δεν θα διατηρούνταν οι γωνίες)
Και οι OA, OB είναι εφαπτόμενες στην εικόνα
του C' στα A, B αντίστοιχα $\Rightarrow C' \mapsto C'$